udako
euskal
unibertsitatea

# BARIANTZ ANALISIA

IRUINEA 1979

udako
euskal
unibertsitatea

UDAKO EUSKAL UNIBERTSITATEA

IRUÑEA 1979

# BARIANTZ ANALISIA

PRESTATZAILE: ANGELES IZTUETA

# B A R I A N T Z   A N A L I S I A

ESTATISTIKA

Egile: Anjeles Iztueta Azkue
Matematikalaria
Ekonomi Fakultatean, irakasle
Bilboko Unibertsitatean

U. E. U. 79

# AURKIBIDEA

## 0. S A R R E R A.

**0. 1. BARIANTZ ANALISIA.** Zertan datza? Zertarako erabili ohi da?

Adibidez, suposa dezagun, gari mota baten errendimenduan, faktore batzuk (hazi, hazaro,lurtzati, humidurak) duten eragina aztertu nahi dugula.

Hoietatik, batzuk aukera genitzake,(aldez aurretik,guretzat eragin gehiena duteenetakoetatik) eta gariaren errendimenduan,beroien eragina aztertu nahian, diseinu bat antola eta egokitu genezake.

Funtsean hau esan genezake: "esperimendu batetan, faktore batek datueri, (azareari dagokionaz gain) eransten dien sakabanakuntza naiko handia edo garrantziduna denean, faktorearen eragina esperimenduan, nabaria dela baieztatu genezake".

Bariantz analisia honetan datza: "DATUEN SAKABANAKUNTZA GUZTIRA, BANAKATZEAN: ALDE BATETIK FAKTORE DESBERDIN BAKOITZARI DAGOKION SAKABANAKUNTZA ETA BESTETIK AZAREARI DAGOKIONA; ETA ONDOREN BEROIEN GARRANTZIA ESTATISTIKOKI AZTERTZEAN".

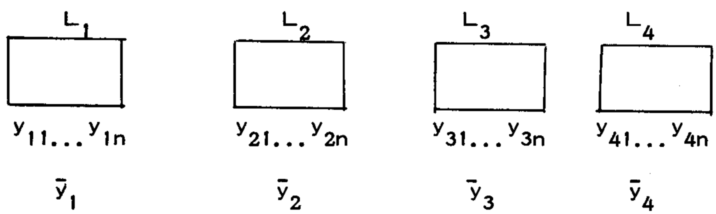
Adibidearekin jarraituaz,

bedi Y = (gari mota baten errendimenduaren zenbakizko neurgarria).
eta suposa dezagun ,Y. ren gain, faktore batzuk duten eragina aztertu nahi dugula, esperimendu batetaz.
Sinbolikoki: Y? (hazi mota, lurzatia, humidura...)

Gauzak errexteaz suposa dezagun azterketa mugatzen dugula eta honetan datzala: ze eragin dute gariaren Y erredimenduan lurtzati moeta desberdinek?. Y? (Lurtzati).

Era honetako diseinua egin genezake:

Lau lurtzati moeta desberdin aukera ondoren, $L_1$, L2, $L_3$, $L_4$, lurtzati bakotzean eta egoera berdinetan (hazi mota berdina, humidura berdina, egun berdinean... e. a. ) garia aldatzen dugu; geroz zati bakoitzean goriaren Y, errendimenduaren neurketak egiten ditugularik:




Lurtzati bakoitzean, datu enpirikoek duten sakabanakuntza teorikoki azareari bakarrik dagokio. Azare-egoera lurtzati guztietan berdina dela suposat uko dugu.

Noiz esan liteke, Y.ren gain, lurtzati mota desberdinek ez dutela eraginik?

Intuitiboki ikus daiteke, kasu horretan hau gertatu beharko litzatekeela: lurtzati desberdinetan batez-besteko gariaren errendimendua teorikoki berdina izatea. Beraz bariantz analisia (kasu honetan) $H_o$ hipotesiahau egiaztatzen datza:

$$H_o: E(\bar{y}_1) = E(\bar{y}_2) = \ldots = E(\bar{y}_4)$$ edo baliokidea dena, lurtzati moeta desberdinek ez dute ereginik gariaren Y errendimenduan.

Nola egiaztatzu $H_o$ hipotesia?...

Ze lurtzati zaizkio faboragarrigoak, gari mota horri?...

Galdera guzti hoieri erantzun genitzaioke Bariantz analisiaz.

Berdin beste eratako diseinuak egin genitzake Y? (lurtzati mota, hazi mota), Y? (lurtzati, hazi mota humidura)... azterketei dagozkienak.

## 0. 2. EREDU DESBERDINAK, BARIANTZ ANALISIAN

Bi eratako faktoreak, ditugu, Bariantz analisian: eragin sistematikozko faktoreak, eta eragin aleatoriozko faktoreak.

### Eragin sistematikozko faktoreak

esperimendu batetan, A faktorea, eragin sistematikozkoa dela esango dugu, beronen maila desberdinen kopurua finitua izanik, guztiak hartzen baldin badira, esperimenduan. (zeinak zenbatugarriak ala zenbatugaitzak isan daitezkelarik).

adibidez:

A: sexua — G. E. (maila zenbatugaitzak)

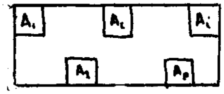
A: tenperatura gorena (negumindegi barnean) — 30º 35º 40º (maila zenbatugarriak)

### Eragin aleatoriozko factoreak

esperimendu batetan, A* faktorea, eragin aleatoriozkoa dela esango dugu, beronen maila desberdinen kopurua haundia ala infinitua izanik, ez baldin badira guztiak hartzen esperimenduan, baizik eta maila-populazioaren erakuskari aleatorio bat hartzen da, eta erakuskari honetako mailen eragina egiaztatuaz, maila guztietara indukzioz hau hedatzen da.

adibidez:

A: lurtzati moeta
(eskualde baten
barnean)



(maila
zenbatugaitzak)

(lurtzati unitateak finkatu ondoren, aleatorioki,kopuru finitu bat lurtzati, bakarrik aukeratzen dugu)

<u>Eredu desberdin batzuk Bariantz analisiaren barnean</u>

I. eredua: Y? (A, B, . . . , L) non: A, B, . . . L faktoreak eragin sistematikozko faktoreak dira guztiak.

II. eredua: Y? ($A^*$, $B^*$, . . . $L^*$ ) non: $A^*$, $B^*$, . . . $L^*$ faktoreak eragin aleatoriozko faktoreak dira guztiak (eta faktore bakoitzaren maila-populazioa infinitua da).

I e II nahasia: Y? (A, $B^*$ , C. . . $L^*$ ) non: faktore batzuk I. eredukoak eta besteek II. eredukoak dira.

III. eredua: Y?($A^*$, $B^*$ , . . . $L^*$ ) non: $A^*$, $B^*$ . . . $L^*$ faktoreak eragin aleatoriozko faktoreak dira guztiak (eta faktore bakoitzaren maila-populazioa handia baldin bada ere, finitua da).

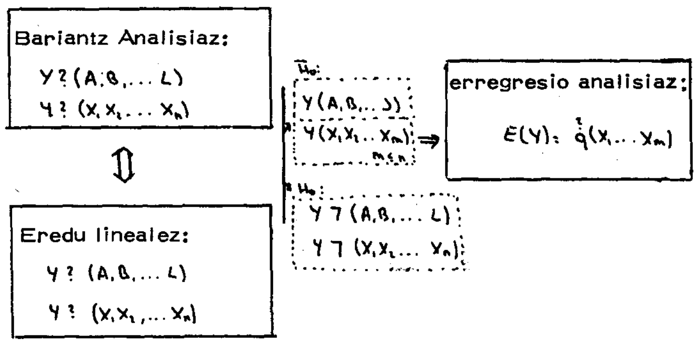
.
.
.

Denak ez baldin baditugu aipatzen ere,ozehazki ikasiak Bariantz analisian barnean , oraingoz , hamar eredu desberdin bainan gehiago daude, Beraz. . .

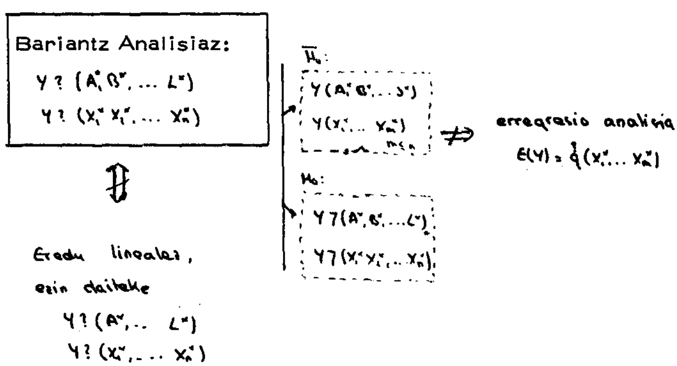
## 0. 3. BARIANTZ ANALISI, ERREGRESIO ANALISI ETA EREDU LINEALEN ARTEKO ERLAZIO ETA ZERIKUSIAK.

Organigrama batetaz, honela laburtu genitzake elkarren arteko erlazioak:

I. ereduan




II. ereduan



## 0. 4. ZERTARA MUGATUKO GARA LAN HONETAN? ETA ZE BI ERATARA IRAKUR DEZAKEZU?

Lan honetan, bi irakurbide dituzu: bata partziala, gehienbat biologo, soziologo... eta medikuentzat; * 1. 1. 2., * 2. 1. 2. * 2. 2. 2. zatiak irakurri gabe, lanaren haria eta bariantz analisiaren metodologia osoki har dezakezu. Bestea, irakurketa osea, honetarako matematika eta estatistika maila jakin bat aldez aurretik behar beharrezkoa delarik.

Lan honetan, I. ereduko kasu berezi batzuk besterik ez ditut zehazki azalduko (zeinak maiztasun eta erabiltasunaren arabera hautatu ditut).

# 1. ALDAGAI ALEATORIO BATEN GAIN, FAKTORE BATEK DUEN ERAGINAREN EGIAZTAPENA ETA BERONEN NEURGARRIAK, BARIANTZ ANALISIAZ.

(Obserbazioen sailkatze sinplea) (Y ? (A))

## 1. 1. ERAGIN SISTEMATIKOZKO FAKTOREA. I. Ereduan.

### 1. 1. 1. Esperimenduaren diseinu eta aurre-hipotesiak

- Kontsidera dezagun p maila desberdin dituen A faktore baten aranera agindako Y ren obserbazioen sailkatie bat; i maila desberdin bakoitzean, Y aldagaiaren $n_i$ obserbazio hartzen ditugu.

Datuak datorren era honetako taula sinplean azaldu genitzake:

| A. ren mailak: | 1 | 2 | . . | i | . | p |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $y_{11}$ | $y_{21}$ | . . | $y_{i1}$ | . | $y_{p1}$ |
| | $y_{12}$ | $y_{22}$ | . . | $y_{i2}$ | . | $y_{p2}$ |
| Y.ren obserbazioak: | . | . | . . | . | . | . |
| | $y_{1j}$ | $y_{2j}$ | . . | $y_{ij}$ | . | $y_{pj}$ |
| | . | . | . . | . | . | . |
| | $y_{1n_1}$ | $y_{2n_2}$ | . . | $y_{in_i}$ | . | $y_{pn_p}$ |

p: A faktorearen maila kopurua. $i = 1, \dots p$

$n_i$: obserbazio kopurua 'i' maila bakoitzean. $j = 1, \dots n_i \quad \forall i$

$N = \sum_{i=1}^{p} n_i$ : obserbazio kopurua guztira.

$[y_{ij}]$ : 'i' mailari dagokion 'j' obserbazioa.

. (Kasu berezi bat: maila guztietan obserbazio kopuru dugunean izango litzateke; hots: $n_i = n \ \forall i$, $N = np$)

• • Diseinu honetan <u>AURRE-HIPOTESI</u> hoiek onartzen ditugu:

$H_{(1)}$ : Y. ren p erakuskariak independienteak dira (zeinak $n_i$ tamaiñakoak dira i maila bakoitzean).

$H_{(2)}$: Maila desberdinetako erakuskariak, banaketa normala duten populazioeri dagozkienak dira. (hipotesi hau egiaztatzeko, maila bakoitzean $\chi$. ren testa erabili ohi da)

$H_{(3)}$: Maila desberdinetako erakuskariak, teorikoki sakabanakuntza berdina dute, (edo ta azare-egoera maila guztietan berdina da). (hipotesi hau egiaztatzeko, Bartley. ren testa erabili ohi da).

Hots, laburki:

$$H_{(2)} \text{ eta } H_{(3)}: \begin{cases} (y_{11} \dots y_{1j} \dots y_{1n_1}) \in N(u_1, \sigma^2) \\ (y_{i1} \dots y_{ij} \dots y_{in_i}) \in N(u_i, \sigma^2) \\ (y_{p1} \dots y_{pj} \dots y_{pn_p}) \in N(u_p, \sigma^2) \end{cases}$$

• • • <u>BARIANTZ ANALISIA</u> : $H_0$: $u_1 := u_2 = \dots = u_p$ Hipotesiaren, egiaztapenean datza, signifikantza - maila jakin batetan.

Datu enpirikoen edo obserbazioen arabera, $H_0$ hipotesia errefusatzen bada, hau baieztatu leike: 'Y aldagaiaren gain, A faktoreak duen eragina nabaria dela'.

eta A faktorea zenbatugarria balitz, erregresia analisi bat egin genezake.

## * 1.1.2. EREDU MATEMATIKO ETA BARIANTZ ANALISIAREN OINARRI TEORIKOAK

### 1.1.2.1. SAKABANAKUNTZAREN DESKONPOSAKETA

(bitez: $y_{i.} = 1/n_i \cdot \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}$ ; $y_{..} = 1/N \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}$ )

$y_{ij}$ obserbazio bakoitzaretzat deskonposaketa hau egin genezake:

$$(y_{ij} - y_{..}) = (y_{ij} - y_{i.}) + (y_{i.} - y_{..})$$

berrekatu eta i eta j guztietan batu ondoren (biderkadura gurutzatuak ezeztatzen direnez gero), zera dugu:

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - y_{..})^2 & = & \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - y_{i.})^2 & + & \sum_{i=1}^{p} n_i (y_{i.} - y_{..})^2 \\ K & = & K_0 & + & K_A \end{array}}$$

K: sakabanakuntza guztira

$K_A$: mailan arteko sakabanakuntza. (A faktorearen eraginari dagokiona)

$K_0$: mailen barneko sakabanakuntza. (Azareari dagokion sakabanakuntza guztira).

### 1.1.2.2. EREDU MATEMATIKOA

Eraginak batukorrak direla onarIuz gero, diseinu eta aurrehipotesieri dagokien eremu matematikoa hau litzateke:

$$\boxed{\begin{array}{ll} y_{ij} = u_i + \varepsilon_{ij} = (u + \alpha_i) + \varepsilon_{ij} & \forall j = 1,\ldots,n_i \\ & \forall i = 1,\ldots,p \\ \alpha_i , \varepsilon_{ij} \quad \text{independienteak} & \end{array}}$$

$u$ : media teorikoa guztira ; $u = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i u_i$

$\alpha_i$: i mailaren eragin teorikoa; $\alpha_i = u_i - u$ ; $\alpha_. = 0$

$\varepsilon_{ij}$: Azarearen eragina $y_{ij}$-n

beraz , eredu honetan:

$$y_{i.} = u_i + \varepsilon_{i.} = (u+\alpha_i) + \varepsilon_{i.} \qquad \forall i = 1,\dots p$$

$$y_{..} = u + \varepsilon_{..} = (u + \alpha_.) + \varepsilon_{..}$$

eta:

$$H_0: u_1 = u_2 = \dots = u_p = u \Leftrightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} n_i \alpha_i^2 = 0$$

1.1.2.3. ESTIMAKETAK EREDUAN

$$\hat{u}_i = y_{i.} = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \quad / \quad E(\hat{u}_i) = u_i \quad \forall i=1,\dots,p$$

$$\hat{u} = y_{..} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \quad / \quad E(\hat{u}) = u$$

$$\hat{\alpha}_i = y_{i..} - y_{..} \quad / \quad E(\hat{\alpha}_i) = \alpha_i \quad \forall i=1,\dots,p$$

1.1.2.4. ESTATISTIKOAREN ERAIKETA, BERONEN PROBABILITATE BANAKETA ETA TESTA

ESTATISTIKOAREN ERAIKETA

* Lehenik, aipatu ditugun $K_a$ eta $K_0$.ren balio itxadotuak teorikoki, zein diren ikus ditzagun, hots: $E(K_a)$? $E(K_0)$?

$$\cdot\ K_a = \sum_{i=1}^{p} n_i (y_{i.} - y_{..})^2 = \sum_{i=1}^{p} n_i (u + \alpha_i + \varepsilon_{i.} - \mu - \alpha_. - \varepsilon_{..})^2 \underset{(*)}{=}$$

$$= \sum_{i=1}^{p} n_i \alpha_i^2 + \sum_{i=1}^{p} n_i (\varepsilon_{i.} - \varepsilon_{..})^2$$

$$E(K_a) = E\left(\sum_i n_i\alpha_i^2 + \sum_i n_i(\varepsilon_{i.} - \varepsilon_{..})^2\right) \underset{(**)}{=} \sum_i n_i\alpha_i^2 + \sum_i n_i\left(\frac{\sigma^2}{n_i} - \frac{\sigma^2}{N}\right) =$$

$$= \boxed{\sum_i n_i\alpha_i^2 + (p-1)\sigma^2}$$

• $$K_0 = \sum_i\sum_j (y_{ij} - y_{i.})^2 = \sum_i\sum_j (\mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij} - \mu - \alpha_i - \varepsilon_{i.})^2 \underset{(*)}{=}$$

$$= \sum_i\sum_j (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{i.})^2 .$$

$$E(K_0) = E\left(\sum_i\sum_j(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{i.})^2\right) = \sum_i E \sum_j (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{i.})^2 \underset{(**)}{=} \sum_i (n_i - 1)\sigma^2 =$$

$$= \boxed{(N-p)\sigma^2}$$

* Era honetan , $\sigma^2$ azare-bariantza teorikoaren bi estimatzaile ditugu:

• $$S_1^2 = \frac{K_a}{p-1} = \frac{\sum n_i(y_{i.} - y_{..})^2}{p-1}$$

non: $E(S_1^2) = E\left(\frac{K_a}{p-1}\right) = \frac{1}{p-1}\sum_i n_i\alpha_i^2 + \sigma^2$

- $S_1^2$, $H_0$ hipotesian (hots: $u_1 = \ldots = u_p$ edo baliokidea dena ; $\alpha_i = 0 \;\; \forall i$ ; $\sum_i n_i(u_i - u)^2 = \sum_i n_i\alpha_i^2 = 0$ ; denean) $\sigma^2$ azare-bariantza teorikoaren , sesgorik gabeko estimatzaile bat da; ordez $H_0$-tik kanpo $E(S_1^2) > \sigma^2$ da.

• $$S_2^2 = \frac{K_0}{N-p} = \frac{\sum\sum (y_{ij} - y_{i.})^2}{N-p}$$

non : $E(S_2^2) = E\left(\frac{K_0}{N-p}\right) = \sigma^2$

- $S_2^2$, edozein hipotesietan , $\sigma^2$ azare-bariantza teorikoaren sesgorik gabeko estimatzaile bat da.

---

(*) $\varepsilon_{ij}, \alpha_i$ independienteak baitira.

(**) $(\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}, \ldots, \varepsilon_{in_i}) \in N(0, \sigma^2) \;\; \forall i = 1\ldots p$

. Beraz argi ikus daiteke hau: $H_0$ errefusatzen denean $\frac{E(S_1^2)}{E(S_2^2)} > 1$ da

hots:

baldin bada $\sum_{i=1}^{p} n_i \alpha_i^2 \neq 0 \Rightarrow$

$$\frac{E(S_1^2)}{E(S_2^2)} = \frac{E(K_a/p-1)}{E(K_o/N-p)} = \frac{1/p-1 \cdot \sum_i n_i \alpha_i^2 + \sigma^2}{\sigma^2} > 1$$

. horregaitik, $H_0$ hipotesia egiaztatzeko erabiltzen dugun estatistikoa $f_a = \frac{K_a/p-1}{K_o/N-p}$ da. Eta errefusa -arloa era honetakoa izango da: $E = (f, +\infty)$.

ESTATISTIKOAREN PROBABILITATE BANAKETA

Ikus dezagun orain, ze probabilitate banaketa dagokion $f_a$ estatistikoari ?

Datorren berdintasun honetatik abiaturik:

$$\sum_i \sum_j (y_{ij} - \mu_i)^2 = \sum_i n_i (y_{i.} - y_{..} - \alpha_i)^2 + \sum_i \sum_j (y_{ij} - y_{i.})^2 + N(y_{..} - \mu)^2$$

Cochran. en teorema aplika genezake eta ondorioz hau baieztatu:

$\rightarrow \sum_i n_i (y_{i.} - y_{..} - \alpha_i)^2$ batura kuadratikoek , (p-1) libertate gradu dituen, banaketa jarraitzen dute.

Beraz: $H_0$ hipotesian (edo $\alpha_i = 0$ $\forall$ i denean) :

$\sum_i n_i (y_{i.} - y_{..} - \alpha_i)^2 = K_a = \sum_i n_i (y_{i.} - y_{..})^2$ denez gero

$\Rightarrow$ $K_a \in \chi^2_{p-1}$ $H_0$ hipotesian

$\rightarrow K_0 = \sum_i \sum_j (y_{ij} - y_{i.})^2$ batura kuadratikoek (N-p) libertate gradu dituen banaketa jarraitzen dute. Hots: $K_o \in \chi^2_{N-p}$ .

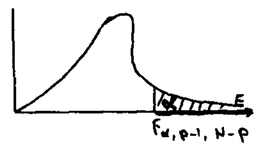
$\rightarrow K_a$ eta $K_o$, elkar independienteak dira.

ORDUAN: $$f_A = \frac{K_A/p-1}{K_0/N-p} \in F_{p-1,N-p}, \quad H_0 \text{ hipotesian}$$

## <u>$H_0$ HIPOTESIA EGIAZTATZEKO TESTA.-</u>

$\alpha$ signifikantza-maila bat hartu ondoren, $H_0$ hipotesiaren errefusa-arlotzat hau hartuko dugu:

$E = (F_{\alpha,\, p-1,\, N-p},\ +\infty)$ non : $P_{H_0}\left[f > F_{\alpha,\, p-1,\, N-p}\right] = \alpha$




beraz, honela egingo dugu testa:

baldin bada : $f_a = \dfrac{K_A/p-1}{K_0/N-p} > F_{\alpha,\, p-1,\, N-p}$

$\Rightarrow$ <u>$H_0$ hipotesia errefusatzen dugu,</u> edo <u>A faktoreak Y aldagaiaren gain eragin nabaria duela baieztatzen dugu,</u> ( signifikantza maila jakinean).

### 1.1.3. LABURPEN PRAKTIKO - TAULAK - KALKULAERA Y ?(A)

- Datu enpirokoen taula eta medien kalkulaketa

| | 1 | . . . | i | . | p | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $y_{11}$<br>⋮<br>$y_{1n_1}$ | | $y_{i1}$<br>⋮<br>$y_{in_i}$ | | $y_{p1}$<br>⋮<br>$y_{pn_p}$ | | |
| mediak: | $y_{1.}$ | . . . | $y_{i.}$ | . | $y_{p.}$ | → | $y_{..}$ |

$$y_{i.} = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} = \frac{1}{n_i}(y_{i1}+ \dots + y_{in_i}) \qquad \forall i$$

$$y_{..} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i \cdot y_{i.} = \frac{1}{N}(n_1\, y_{1.} + \dots + n_p\, y_{p.})$$

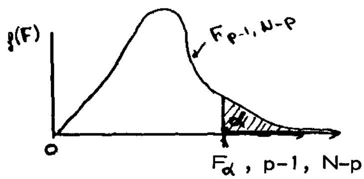
- - Batura kuadratiko eta estatistikoen kalkulaketa

| Bariantz iturria | Batura kuadratikoak | libertate graduak | estatistikoa |
|---|---|---|---|
| A. faktorearen eragina | $K_A = \sum_{i=1}^{p} n_i (y_{i.}-y_{..})^2$ 'intergrupo' | p-1 | $f_A = \dfrac{K_A/p-1}{K_0/N-p}$ |
| azarea | $K_0 = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-y_{i.})^2$ 'intragrupo' | N-p | |

- - - $H_0 : u_1 = u_2 = \dots = u_p$ (edo baliokidea dena A-k ez du eraginik Y aldagaiaren gain) egiaztatzeko testa:

  . Lehen urratsean, $\alpha$ signifikantza - maila jakin batentzat $F_{\alpha}$, p-1, N-p zenbakia aurkituko dugu F Snedecor.en banaketa tauletan.

Hots:




$$;P\left[F_{p-1,N-p} > F_\alpha\right] = \alpha$$

. bigarren urratsean, testa egingo dugu:

baldin bada: $f_A = \dfrac{K_A/p-1}{K_0/N-p} \leq F_{\alpha,\,p-1,\,N-p}$

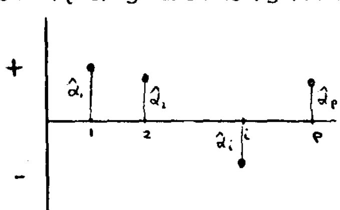
$\Rightarrow$ $H_0$ hipotesia (edo A faktoreak eraginik ez duela Y aldagaiaren gain) baieztatuko dugu, $\alpha$ signifikantza-maila jakinean.

ordez:

baldin bada: $f_A = \dfrac{K_A/p-1}{K_0/N-p} > F_{\alpha,\,p-1,\,N-p}$

$\Rightarrow$ $H_0$ hipotesia errefusatuko dugu edo A faktoreak Y aldagaiaren gain eragina duela baieztatuko dugu % $(1-\alpha)$ konfidantzarekin.

• • • • $H_0$ hipotesia errefusatzen bada grafika batez adierazi genezake Y aldagaiaren gain, A faktorearen i maila desberdinek duten $\alpha_i$ eraginaren neurgarriak.




$$\alpha_i = u_i - u$$
$$\hat{\alpha}_i = y_{i.} - y_{..} \qquad \forall\, i$$

eta grafika honen maximu, minimu eta grafika bera aztertuaz, osoki, esannahi bat emanen diogu.

## 2. ALDAGAI ALEATORIO BATEN GAIN , FAKTORE BIEK DUTEN ERAGINAREN EGIAZTAPENA ETA BERONEN NEURGARRIAK, BARIANTZ ANALISIAZ.

(Obserbazioen sailkatze bikoitza) (Y ? (A, B))

### 2. 1. ELKAREKINTZA IZAN DEZAKETEN FAKTORE BI

(Obserbazioen sailkatze gurutzatu bikoitza) Y? (A, B, $I_{ab}$)

#### 2. 1. 1. Esperimenduaren diseinu eta aurre-hipotesiak

- Kontsidera dezagun, p, maila desberdin dituen, A faktore baten eta, q, maila desberdin dituen, beste B faktore baten, arauera egindako Y. ren obserbazioen sailkatze bikoitz bat; (i, j) tegitxota bakoitzean Y. ren n obserbazio ($n > 1$) hartzen ditugu.

Datuak datorren era honetako taula bikoitzean azaldu genitzake:

| A \ B | $B_1$ | . . | $B_j$ | . . | $B_q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $y_{111} \ldots y_{11n}$ | . . | $y_{1j1} \ldots y_{1jn}$ | . | $y_{1q1} \ldots y_{1qn}$ |
| . | . | | . | | . |
| $A_i$ | $y_{i11} \ldots y_{i1n}$ | . . | $y_{ij1} \ldots y_{ijn}$ | . | $y_{iq1} \ldots y_{iqn}$ |
| . | . | | . | | . |
| $A_p$ | $y_{p11} \ldots y_{p1n}$ | . . | $y_{pj1} \ldots y_{pjn}$ | . | $y_{pq1} \ldots y_{pqn}$ |

p : A faktorearen maila kopurua. $i=1,\ldots p$

q : B faktorearen maila kopurua. $j=1,\ldots q$

p q: (i, j) tegitxota kopurua.

n : Obserbazio kopurua (i, j) tegitxota bakoitzean

N=npq: Obserbazio kopurua guztira

$[y_{ij\alpha}]$ : (i, j) tegitxotan (zeina A faktorearen i maila eta B faktorearen j mailari dagokio), $\alpha$ obserbazioa.

● ● Diseinu honetan <u>AURRE-HIPOTESI</u> hoiek onartzen ditugu:

$H_{(1)}$: Y.ren p.q erakuskariak independienteak dira (zeinak n tamainakoak dira (i, j) tegitxota guztietan).

$H_{(2)}$: tegitxota desberdinetako erakuskariak, banaketa normala duten populazioeri dagozkienak dira.
(hipotesi hau egiaztatzeko, tegitxota bakoitzean $\chi^2$.ren testa erabili ohi da).

$H_{(3)}$: tegitxota desberdinetako erakuskariak, teorikoki sakabanakuntza berdina dute (edo ta azare -egoera tegitxota guztietan berdina da).
(hipotesi hau egiaztatzeko, Bartley.en testa erabili ohi da).

Hots, laburki:

$$H_{(2)} \text{ eta } H_{(3)} : [(y_{ij1}, y_{ij2}, \dots y_{ij\alpha} \dots, y_{ijn}) \in N(u_{ij}, \sigma^2)]_{(i,j)}$$

● ● ● <u>BARIANTZ ANALISIAZ</u>, galdera hoieri erantzuten saiatuko gara:

.- Y aldagaiaren gain, A faktoreak duen eragina nabaria al da?. Honentzat ze neurgarri har ditzakegu?.

.- Y aldagaiaren gain B faktoreak duen eragina nabaria al da? Honentzat ze neurgarri har ditzakegu?.

.- A eta B faktorearen eraginen arteko elkarekintza, nabaria al da?. Ze neurgarri har ditzakegu?

## * 2.1.2. EREDU MATEMATIKO ETA BARIANTZ ANALISIAREN OINARRI TEORIKOAK

### 2.1.2.1. SAKABANAKUNTZAREN DESKONPOSAKETA

. Bitez: $y_{ij.} = \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n} y_{ij\alpha}$ (media (i,j) tegitxotan)

$y_{i..} = \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q} y_{ij.}$ (media 'i' lerroan)

$y_{.j.} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} y_{ij.}$ (media j zutabean)

$y_{...} = \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q} y_{.j.} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} y_{i..} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{\alpha=1}^{n} y_{ij\alpha}$ (media guztira)

. $y_{ij\alpha}$ obserbazio bakoitzarentzat deskonposaketa hau egin genezake:

$$(y_{ij\alpha}-y_{...}) = (y_{i..}-y_{...}) + (y_{.j.}-y_{...}) + (y_{ij.}+y_{...}-y_{i..}-y_{.j.}) + (y_{ij\alpha}-y_{ij.})$$

berrekatu eta i, j, eta $\alpha$ guztietan batu ondoren (biderkadura gurutzatuak ezeztatzen direnez gero) zera dugu:

$$\boxed{\underbrace{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{\alpha=1}^{n}(y_{ij\alpha}-y_{...})^2}_{K} = \underbrace{n.q\sum_{i=1}^{p}(y_{i..}-y_{...})^2}_{K_a} + \underbrace{n.p\sum_{j=1}^{q}(y_{.j.}-y_{...})^2}_{K_b} + \underbrace{n\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(y_{ij.}+y_{...}-y_{i..}-y_{.j.})^2}_{K_I} + \underbrace{\sum\sum\sum(y_{ij\alpha}-y_{ij.})^2}_{K_0}}$$

$K$ : sakabanakuntza guztira

$K_a$: A faktorearen eraginari dagokion sakabanakuntza

$K_b$: B faktorearen eraginari dagokion sakabanakuntza

$K_I$: A eta B-ren arteko elkarekintzari dagokion sakabanakuntza

$K_0$: tegitxoten barneko sakabanakuntza (Azareari dagokion sakabanakuntza guztira).

## 2.1.2.2. EREDU MATEMATIKOA

Eraginak batukorrak direla onartuz gero, diseinu eta aurre-hipotesieri dagokien eremu matematikoa hau litzateke:

| | |
|---|---|
| $y_{ij\alpha} = u_{ij} + \varepsilon_{ij\alpha} = (u + \alpha_i + \beta_j + I_{ij}) + \varepsilon_{ij\alpha}$ | $\alpha = 1,\dots n$<br>$j = 1,\dots q$<br>$i = 1,\dots p$ |
| $\alpha_i,\ \beta_j,\ I_{ij},\ \varepsilon_{ij\alpha}$ elkar independienteak dira. | |

u: media teorikoa guztira; $u = \frac{1}{pq}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} u_{ij}$

$u_{i.}$: media teorikoa A faktorearen i mailan; $u_{i.} = \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q} u_{ij}$

$u_{.j}$: media teorikoa B faktorearen j mailan; $u_{.j} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} u_{ij}$

$\alpha_i$ : A. ren i mailaren eragin teorikoa , $\alpha_i = u_{i.} - u$ ; $\alpha_. = 0$

$\beta_j$ : B. ren j mailaren eragin teorikoa; $\beta_j = u_{.j} - u$ ; $\beta_. = 0$

$I_{ij}$ : A. ren i mailan, eta B. ren j mailaren arteko elkarekintza teorikoa;

$$I_{ij} = u_{ij} - u - \beta_j - \alpha_i = u_{ij} + u - u_{i.} - u_{.j}$$

$$I_{i.} = 0 \quad ; \quad I_{.j} = 0$$

$$(I_{ij} = 0 \Rightarrow u_{ij} = u + \alpha_i + \beta_j)$$

$\varepsilon_{ij\alpha}$ : Azarearen eragina $y_{ij\alpha}$ -n

Ondorioz, eredu honetan:

$$y_{ij.} = u_{ij} + \varepsilon_{ij.} = (u + \alpha_i + \beta_j + I_{ij}) + \varepsilon_{ij.}$$

$$y_{i..} = u_{i.} + \varepsilon_{i..} = (u + \alpha_i + \qquad ) + \varepsilon_{i..}$$

$$y_{.j.} = u_{.j} + \varepsilon_{.j.} = (u + \qquad + \beta_j + \quad ) + \varepsilon_{.j.}$$

$$y_{...} = u + \varepsilon_{...} = (u + \qquad\qquad ) + \varepsilon_{...}$$

$$H_o^a : u_{1.} = u_{2.} = \ldots = u_{p.} \iff \alpha_i = 0 \ \ \forall i \iff \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2 = 0$$

$$H_o^b : u_{.1} = u_{.2} = \ldots = u_{.q} \iff \beta_j = 0 \ \ \forall j \iff \sum_{j=1}^{q} \beta_j^2 = 0$$

$$H_o^i : I_{ij} = 0 \ \forall (i,j) \iff \sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{p} I_{ij}^2 = 0$$

2.1.2.3. ESTIMAKETAK EREDUAN

- $$\hat{\mu}_{ij} = y_{ij.} = \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n} y_{ij\alpha} \quad / \quad E(y_{ij.}) = \mu_{ij}$$

$$\hat{\mu}_{i.} = y_{i..} = \frac{1}{qn}\sum_{j=1}^{q}\sum_{\alpha=1}^{n} y_{ij\alpha} \quad / \quad E(y_{i..}) = \mu_{i.}$$

$$\hat{\mu}_{.j} = y_{.j.} = \frac{1}{pn}\sum_{i}\sum_{\alpha} y_{ij\alpha} \quad / \quad E(y_{.j.}) = \mu_{.j}$$

$$\hat{\mu} = y_{...} = \frac{1}{pqn}\sum_{i}\sum_{j}\sum_{\alpha} y_{ij\alpha} \quad / \quad E(y_{...}) = \mu$$

$$\hat{\alpha}_i = y_{i..} - y_{...} \quad / \quad E(\hat{\alpha}_i) = \alpha_i$$

$$\hat{\beta}_j = y_{.j.} - y_{...} \quad / \quad E(\hat{\beta}_j) = \beta_j$$

$$\hat{I}_{ij} = y_{ij.} + y_{...} - y_{i..} - y_{.j.} \quad / \quad E(\hat{I}_{ij}) = I_{ij}$$

## 2.1.2.4. ESTATISTIKOEN ERAIKETA, BEROIEN PROBABILITATE BANAKETA, ETA TESTAK

### ESTATISTIKOEN ERAIKETA

Lehenik, aipatu ditugun $K_a$, $K_b$, $K_I$ eta $K_o$.ren balio itxadotuak teorikoki, zein diren ikus ditzagun, hots:

$E(K_a)$? $E(K_b)$? $E(K_I)$? $E(K_o)$?

- $$K_a = n\,q \sum_i (y_{i..} - y_{...})^2 = n\,q \sum_i \alpha_i^2 + n\,q \sum_i (\varepsilon_{i..} - \varepsilon_{...})^2$$

$$E(K_a) = n\,q \sum_i \alpha_i^2 + n\cancel{q}\ \frac{\sigma^2}{n\cancel{q}}\ (p-1)$$

- $$K_b = n\,p \sum_j (y_{.j.} - y_{...})^2 = n\,p \sum_j \beta_j^2 + n\,p \sum (\varepsilon_{.j.} - \varepsilon_{...})^2$$

$$E(K_b) = np \sum_j \beta_j^2 + n\cancel{p}\ .\ \frac{\sigma^2}{n\cancel{p}}\ (q-1)$$

- $$K_I = n \sum_{ij} (y_{ij.} + y_{...} - y_{i..} - y_{.j.})^2 = n \sum_{ij} I_{ij}^2 + n \sum_{ij} (\varepsilon_{ij.} + \varepsilon_{...} - \varepsilon_{i..} - \varepsilon_{.j.})^2$$

$$E(K_I) = n \sum_{ij} I_{ij} + (p-1)(q-1)\ \sigma^2$$

- $$K_o = \sum_{ij\alpha} (y_{ij\alpha} - y_{ij.})^2 = \sum_{ij\alpha} (\varepsilon_{ij\alpha} - \varepsilon_{ij.})^2$$

$$E(K_o) = pq(n-1)\,\sigma^2 = (N-pq)\,\sigma^2$$

- Era honetan <u>azare-bariantza teorikoaren lau estimatzaile</u> ditugu:

  - $$S_1^2 = \frac{K_a}{p-1} = \frac{nq}{p-1} \sum_i (y_{i..} - y_{...})^2$$

    non: $$E(S_1^2) = E\left(\frac{K_a}{p-1}\right) = \frac{nq}{p-1} \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2 + \sigma^2$$

  - $S_1^2$, bakarrik $H_o^a$ hipotesian (hots : $\alpha_i = 0 \quad \forall i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2 = 0$)

    azare-bariantza teorikoaren, sesgorik gabeko estimatzaile bat da, ordez : $H_o^a$ -tik kanpo $E(S_1^2) > \sigma^2$ da.

  - $$S_2^2 = \frac{K_b}{q-1} = \frac{np}{q-1} \sum_j (y_{.j.} - y_{...})^2$$

    non $$E(S_2^2) = E\left(\frac{K_b}{q-1}\right) = \frac{np}{q-1} \sum_{j=1}^{q} \beta_j^2 + \sigma^2$$

  - $S_2^2$ bakarrik $H_o^b$ hipotesian (hots: $\beta_j = 0 \quad \forall j \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{q} \beta_j^2 = 0$ )

    azare-bariantza teorikoaren, sesgorik gabeko estimatzaile bat da, ordez: $H_o^b$ -tik kanpo $E(S_2^2) > \sigma^2$ da.

  - $$S_3^2 = \frac{K_I}{(p-1)(q-1)} = \frac{n}{(p-1)(q-1)} \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=1}^{p} (y_{ij.} + y_{...} + y_{i..} - y_{.j.})^2$$

    non $$E(S_3^2) = \frac{E(K_I)}{(p-1)(q-1)} = \frac{n}{(p-1)(q-1)} \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=1}^{p} I_{ij}^2 + \sigma^2$$

    $S_3^2$, bakarrik $H_o^I$ hipotesian (hots: $I_{ij} = 0 \quad \forall i,j \Leftrightarrow \sum_{ij} I_{ij}^2 = 0$)

    $\sigma^2$-ren sesgorik gabeko estimatzaile bat da.

    Ordez: $H_o^I$ -tik kanpo $E(S_3^2) > \sigma^2$ da.

$$\cdot\ S_4^2 = \frac{K_o}{N-pq} = \frac{1}{N-pq}\sum_j\sum_i\sum_\alpha (y_{ij\alpha} - y_{ij.})^2$$

non: $$E(S_4^2) = \frac{E(K_o)}{N-pq} = \sigma^2$$

eta $S_4^2$, edozein hipotesietan, $\sigma^2$ -azare bariantza teorikoaren sesgorik gabeko estimatzaile bat da.

- Nola eraiki orduan, $H_o^1$, $H_o^b$, eta $H_o^I$ egiaztatzeko estatistikoak?

- $H_o^A$, hipotesia egiaztatzeko $f_a$ estatistikoa erabiltzen da.

non: $$f_a = \frac{K_a/p-1}{K_o/N-pq}$$

errex ikus daiteke:

$H_o^a$ errefusatzen bada (edo $\sum_i \alpha_i^2 \neq 0$ )

$$\Rightarrow \frac{E(S_1^2)}{E(S_4^2)} = \frac{E(K_a/p-1)}{E(K_o/N-pq)} = \frac{\frac{nq}{p-1}\sum_i \alpha_i^2 + \sigma^2}{\sigma^2} > 1 \text{ dela.}$$

- $H_o^b$ egiaztatzeko $f_b$ estatistikoa erabiliko dugu.

non: $$f_b : \frac{K_b/q-1}{K_o/N-pq}$$

berdin ikus daiteke:

$H_o^b$ errefusatzen bada (edo $\sum_j \beta_j^2 \neq 0$)

$$\Rightarrow \frac{E(S_2^2)}{E(S_4^2)} = \frac{E(K_a/q-1)}{E(K_o/N-pq)} = \frac{\frac{np}{q-1}\sum_j \beta_j^2 + \sigma^2}{\sigma^2} > 1 \text{ dela.}$$

- $H_o^I$ egiaztatzeko $f_I$ estatistikoa erabiliko dugu non:

$$f_I = \frac{K_I/(p-1)(q-1)}{K_o/N-pq}$$

eta ikus daiteke:

$H_o^I$ errefusatzen bada (edo $\sum_{ij} I_{ij}^2 \neq 0$)

$$\Rightarrow \quad \frac{E(S_3^2)}{E(S_4^2)} = \frac{E(K_I/(p-1)(q-1))}{E(K_o/N-pq)} = \frac{\frac{n}{(p-1)(q-1)}\sum_{ij} I_{ij}^2 + \sigma^2}{\sigma^2} > 1 \text{ dela}$$

ESTATISTIKOEN PROBABILITATE BANAKETA

Ikus dezagun ze probabilitate banaketa dagokien,

$$f_A = \frac{K_a/p-1}{K_o/N-pq} \qquad f_b = \frac{K_b/q-1}{K_o/N-pq} \quad \text{eta} \quad f_I = \frac{K_I/(p-1)(q-1)}{K_o/N-pq}$$

estatistikoeri ?

Datorren berdintasun honetatik abiatuaz:

$$\sum_{ij\alpha}(y_{ij\alpha} - \mu_{ij})^2 = nq\sum_i (y_{i..} - y_{...} - \alpha_i)^2 + np\sum_j (y_{.j.} - y_{...} - \Lambda_j)^2 +$$
$$+ n\sum_{ij}(y_{ij.} + y_{...} - y_{i..} - y_{.j.} - I_{ij})^2 + \sum_{ij\alpha}(y_{ij\alpha} - y_{ij.})^2$$
$$+ N(y_{...} - \mu)$$

Cochran-en teorema aplika dezake eta ondorioz hau baieztatu:

- $K_a$ batura kuadratikoek, $H_o^a$ hipotesian, $p-1$ libertate gradu dituen $\chi^2$ banaketa jarraitzen dute. Hots:

$$K_a \in \chi^2_{p-1} \quad , H_o^a \text{ hipotesian}$$

- $K_b$ batura kuadratikoek, $H_o^b$ hipotesian, $(q-1)$ libertate gradu dituen $\chi^2$ banaketa jarraitzen dute. Hots:

$$K_b \in \chi^2_{q-1} \quad ; \quad H_o^b \text{ hipotesian}$$

- $K_o$ batura kuadratikoek, $(N-pq)$ libertate gradu dituen, $\chi^2$ banaketa jarraitzen dute, hots:

$$K_o \in \chi^2_{N-pq}$$

- $K_a$, $K_b$, $K_I$ eta $K_o$ elkar independienteak dira.

Orduan:

$$\boxed{\begin{array}{l} f_a = \dfrac{K_a / p-1}{K_o / N-pq} \in F_{p-1,\, N-pq,}\ (H_o^a \text{ hipotesian}) \\[2ex] f_b = \dfrac{K_b / q-1}{K_o / N-pq} \in F_{q-1,\, N-pq,}\ (H_o^b \text{ hipotesian}) \\[2ex] f_I = \dfrac{K_I / (p-1)(q-1)}{K_o / N-pq} \in F_{(p-1)(q-1),\, N-pq,}\ (H_o^I \text{ hipotesian}) \end{array}}$$

## $H_o^a$, $H_o^b$ eta $H_o^I$ EGIAZTATZEKO TESTAK

$\alpha$ signifikantza-maila jakin batentzat honela egingo ditugu testak:

**I. testa:**

baldin bada: $f_A = \dfrac{K_a / p-1}{K_o / N-pq} > F_{\alpha, p-1, N-pq} \Rightarrow H_o^a$ hipotesia

errefusatzen dugu, edo A faktoreak Y aldagaiaren gain eragin nabaria duela baieztatzen dugu ( $\alpha$ signifikantza-mailan)

**II. testa:**

baldin bada: $f_b = \dfrac{K_b / p-1}{K_o / N-pq} > F_{\alpha, q-1, N-pq} \Rightarrow H_o^b$ hipotesia

errefusatzen dugu, edo B faktoreak Y aldagaiaren gain eragin nabaria duela baieztatzen dugu ( $\alpha$ signifikantza-mailan).

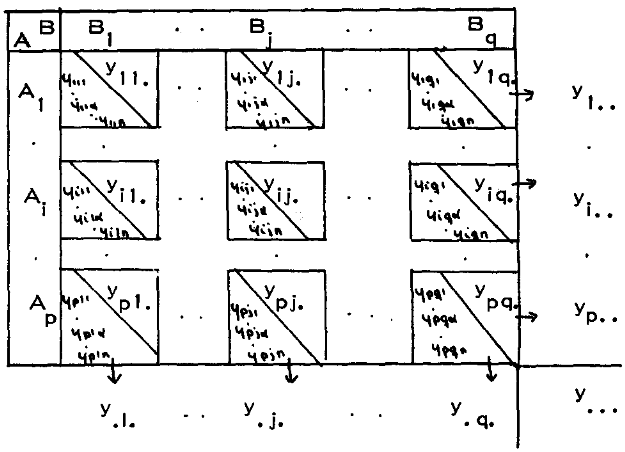
**III. testa:**

baldin bada: $f_I = \dfrac{K_I / (p-1)(q-1)}{K_o / N-pq} > F_{\alpha, (p-1)(q-1), N-pq}$

$\Rightarrow H_o^I$ hipotesia errefusatzen dugu, edo A eta B faktoreak Y aldagaiaren gain duten elkarekintza nabaria dela baieztatzen dugu ($\alpha$ signifikantza-mailan).

## 2.1.3. LABURPEN PRAKTIKO -TAULAK- KALKULAERA $Y?(A,B,I_{ab})$

. Datu enpirikoen taula eta medien kalkulaketa




. . Batura kuadratiko eta estatistikoen kalkulaketa

| Bariantz iturria | Batura kuadratikoak | libertate graduak | estatistikoak |
|---|---|---|---|
| A. ren eragina | $K_a = nq\sum_{i=1}^{p}(y_{i..}-y_{...})^2$ | p−1 | $f_a = \frac{K_a/p-1}{K_o/N-pq}$ |
| B. ren eragina | $K_b = np\sum_{j=1}^{q}(y_{.j.}-y_{...})^2$ | q−1 | $f_b = \frac{K_b/q-1}{K_o/N-pq}$ |
| $I_{ab}$. ren eragina | $K_I = n\sum_{ij}(y_{ij.}+y_{...}-y_{i..}-y_{.j.})^2$ | (p−1)(q−1) | $f_I = \frac{K_I/(p-1)(q-1)}{K_o/N-pq}$ |
| Azarea | $K_o = \sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{p}\sum_{\alpha=1}^{n}(y_{ij\alpha}-y_{ij.})^2$ | N−pq | |

. . . <u>A faktorearen eragina egiaztatzeko testa</u>:

$\alpha$ signifikantza-maila jakin batentzat,


baldin bada: $f_a = \dfrac{K_a/p-1}{K_o/N-pq} > F_{\alpha,\, p-1,\, N-pq}$

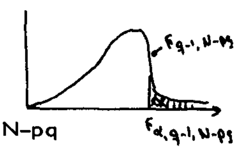
$\Rightarrow H_o^{a}$ hipotesia errefusatuko dugu edo <u>A faktoreak Y aldagaiaren gain eragin nabaria dela baieztatuko dugu, % (1-$\alpha$) konfidantzarekin.</u>

eta kasu honetan, grafika batetaz adierazi genitzake, Y.ren gain $A_i$ maila desberdinek duten $\alpha_i$ eraginen neurgarriak:


$\hat{\alpha}_i = \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...} \quad \forall i$

. . . <u>B faktorearen eragina egiaztatzeko testa</u>:

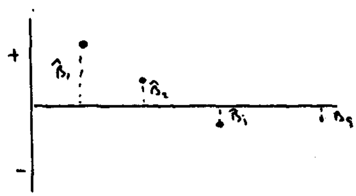
$\alpha$ signifikantza-maila jakin batentzat,




baldin bada: $f_b = \dfrac{K_b\,/\,q-1}{K_o\,/\,N-pq} > F_{\alpha,\, q-1,\, N-pq}$

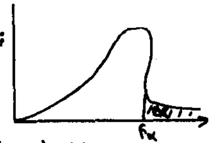
$\Rightarrow H_o^{b}$ hipotesia errefusatuko dugu edo <u>B faktoreak Y aldagaiaren gain eragin nabaria dela baieztatuko dugu, % (1-$\alpha$) konfidantzarekin.</u>

eta kasu honetan, grafika batetaz adierazi genitzake, Y.ren gain $B_j$ maila desberdinek duten $\beta_j$ eraginen neurgarriak:




$\hat{\beta}_j = \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...} \quad \forall j$

. . . <u>A eta B faktoreen elkarekintza egiaztatzeko testa;</u>

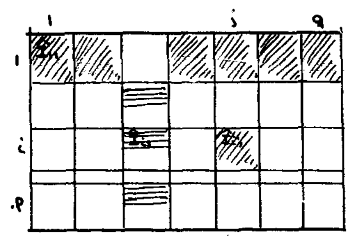



$\alpha$ signifikantza - maila jakin batentzat

baldin bada: $f_i = \dfrac{K_1/(p-1)(q-1)}{K_0/N-pq}$ $\quad F_{\alpha,\,(p-1)(q-1),\,N-pq}$

$\Rightarrow H_o^{I}$ hipotesia errefusatuko dugu edo <u>A eta B faktoreen elkarekintza nabaria dela, Y.ren gain baieztatuko dugu % (1- ) konfidantzarekin</u>

eta elkarekintza desberdin hoien neurgarriak honelako grafika batetaz adierazi genitzake:




$\hat{I}_{ij} = y_{ij.} + y_{...} - y_{i..} - y_{.j.}$ $\quad \forall i,j$

elkarekintza positiboa

elkarekintza negatiboa

... eta grakikaren bidez berezitasun hoiek aztertu genitzake: (positibo, negatibo, asko, gutti ...) eta esannahi bat eman experimenduan.

## 2.2. ELKAREKINTZARIK EZ DUTEN FAKTORE BI. Y?(A, B)

(Obserbazioen sailkatze gurutzatu bikoitza)

### 2.2.1. Esperimenduaren diseinu eta aurre-hipotesiak

● Kontsidera dezagun, p, maila desberdin dituen, A faktore eta ,q, maila desberdin dituen, beste B faktore baten, arauera egindako Y.ren obserbazioen sailkatze bikoitza, non: (i,j) tegitxota bakoitzean Y.ren obserbazio bat bakarrik hartzen dugu, (n=1).

Datuak datorren era honetako taula bikoitzean azaldu genitzake:

| A \ B | $B_1$ | . . | $B_j$ | . | $B_q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $y_{11}$ | . . | $y_{1j}$ | . | $y_{1q}$ |
| . | . | | . | | . |
| $A_i$ | $y_{i1}$ | . . | $y_{ij}$ | . | $y_{iq}$ |
| . | . | | . | | . |
| $A_p$ | $y_{p1}$ | . . | $y_{pj}$ | . | $y_{pq}$ |

p: A faktorearen maila kopurua. $i=1,\dots p$

q: B faktorearen maila dopurua. $j=1,\dots q$

pq: (i, j) tegitxota kopurua.

n=1: obserbazio kopurua tegitxota bakoitzean.

N= pq: Obserbazio dopurua guztira.

$[y_{ij}]$: Y.ren obserbazioa (i, j) tegitxotan.

●● Diseinu honetan AURRE-HIPOTESI hoiek onartzen ditugu:

$H_{(1)}$: Y.ren pq obserbazioak independienteak dira.

$H_{(2)}$ eta $H_{(3)}$: $y_{ij} \in N(u_{ij}, \sigma^2) \quad \forall\, i, j$

● ● ● BARIANTZ ANALISIAZ, galdera hoieri erantzuten saiatuko gara:

.- Y aldagaiaren gain, A faktoreak duen eragina nabaria al da?. Honentzat ze neurgarri har ditzakegu?.

.- Y aldagaiaren gain B faktoreak duen eragina nabaria al da? Honentzat ze neurgarri har ditzakegu?

## * 2. 2. 2. EREDU MATEMATIKO ETA BARIANTZ ANALISIAREN OINARRI TEORIKOAK

### 2. 2. 2. 1. SAKABANAKUNTZAREN DESKONPOSAKETA

Diseinu honi egokitzen zaion deskonposaketa hau litzateke:

$$\underbrace{\sum_j \sum_i (y_{ij} - y_{..})^2}_{K} = \underbrace{q \sum_i (y_{i.} - y_{..})^2}_{K_a} + \underbrace{p \sum_j (y_{.j} - y_{..})^2}_{K_b}$$

$$+ \underbrace{\sum_j \sum_i (y_{ij} + y_{..} - y_{i.} - y_{.j})^2}_{K_o}$$

K: sakabanakuntza guztira

$K_a$: A faktorearen eraginari dagokion sakabanakuntza

$K_b$: B faktorearen eraginari dagokion sakabanakuntza

$K_o$: Azareari dagokion sakabanakuntza guztira.

### 2. 2. 2. 2. EREDU MATEMATIKOA

Eraginak batukorrak direla onartuz gero, diseinu eta aurre_ hipotesieri dagokien eremu matematikoa hau litzateke:

$$y_{ij} = u_{ij} + \varepsilon_{ij} = (u + \alpha_i + \beta_j) + \varepsilon_{ij} \qquad \begin{array}{l} i = 1, \dots p \\ j = 1, \dots q \end{array}$$

$\alpha_i$, $\beta_j$, $\varepsilon_{ij}$ elkar independienteak dira.

u: media teorikoa guztira; $u = \frac{1}{pq} \sum_j \sum_i u_{ij}$

$u_{i.}$ : media teorikoa A faktorearen i mailan; $u_{i.} = \frac{1}{q} \sum_j \sum_i u_{ij}$

$u_{.j}$: media teorikoa B faktorearen j mailan; $u_{.j} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} u_{ij}$

$\alpha_i$ : A. ren , i mailaren eragin teorikoa, $\alpha_i = u_{i.} - u$; $\alpha_. = 0$

$\beta_j$: B. ren j mailaren eragin teorikoa ; $\beta_j = u_{.j} - u$; $\beta_. = 0$

$\varepsilon_{ij}$: azarearen eragina $y_{ij}$ obserbazioan.

beraz, eredu honetan:

$$y_{i.} = u + \alpha_i + \cancel{\beta_.} + \varepsilon_{i.}$$

$$y_{.j} = u + \cancel{\alpha_.} + \beta_j + \varepsilon_{.j}$$

$$y_{..} = u + \cancel{\alpha_.} + \cancel{\beta_.} + \varepsilon_{..}$$

$$H_o^a : u_{1.} = \dots = u_{p.} \iff \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2 = 0 \iff \alpha_i = 0 \quad \forall i$$

$$H_o^b : u_{.1} = \dots = u_{.q} \iff \sum_{j=1}^{q} \beta_j^2 = 0 \iff \beta_j = 0 \quad \forall i$$

2.2.2.3. ESTIMAKETAK EREDUAN

$$\hat{\mu}_{ij} = y_{ij} \quad / \quad E(y_{ij}) = \mu_{ij}$$

$$\hat{\mu}_{i.} = y_{i.} \quad / \quad E(y_{i.}) = \mu_{i.}$$

$$\hat{\mu}_{.j} = y_{.j} \quad / \quad E(y_{.j}) = \mu_{.j}$$

$$\hat{\mu} = y_{..} \quad / \quad E(y_{..}) = \mu$$

$$\hat{\alpha}_i = y_{i.} - y_{..} \quad / \quad E(\hat{\alpha}_i) = \alpha_i$$

$$\hat{\beta}_j = y_{.j} - y_{..} \quad / \quad E(\hat{\beta}_j) = \beta_j$$

## 2.2.2.4. ESTATISTIKOEN ERAIKETA, BEROIEN PROBABILITATE BANAKETA, ETA TESTAK

### ESTATISTIKOEN ERAIKETA

Eremu matematikoan oinarrituaz froga daiteke:

$$K_a = q \sum_{i=1}^{p} (y_{i.} - y_{..})^2 \longrightarrow E(K_a) = q \sum_i \alpha_i^2 + \sigma^2(p-1)$$

$$K_b = p \sum_{j=1}^{q} (y_{.j} - y_{..})^2 \longrightarrow E(K_b) = p \sum_j \beta_j^2 + \sigma^2(q-1)$$

$$K_o = \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=1}^{p} (y_{ij} + y_{..} - y_{i.} - y_{.j})^2 \rightarrow E(K_o) = (p-1)(q-1)\,\sigma^2$$

- **Beraz, $\sigma^2$- azare bariantza teorikoaren hiru estimatzaile** ditugu:
  - $S_1^2 = \dfrac{K_a}{p-1}$

    non: $E(S_1^2) = \dfrac{q}{p-1} \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2 + \sigma^2$

  - $S_2^2 = \dfrac{K_b}{q-1}$

    non: $E(S_2^2) = \dfrac{p}{q-1} \sum_{j=1}^{q} \beta_j^2 + \sigma^2$

  - $S_3^2 = \dfrac{K_o}{(p-1)(q-1)}$

    non: $E(S_3^2) = \sigma^2$

- Beraz, kasu honetan, $H_o^a$ eta $H_o^b$ hipotesiak egiaztatzeko erabiltzen ohi diran estatistikoak hauk dira:

$$f_a = \frac{K_a/\,p-1}{K_o/(p-1)(q-1)}$$ , $H_o^a$ hipotesia egiaztatzeko.

$$f_b = \frac{K_b/q-1}{K_o/(p-1)(q-1)}$$ , $H_o^b$ hipotesia egiaztatzeko

## ESTATISTIKOEN PROBABILITATE BANAKETA

Froga daiteke, Cochran. en teorema aplikatuaz:

- $K_a \in \chi^2_{p-1}$ , $H_o^a$ hipotesian
- $K_b \in \chi^2_{q-1}$ , $H_o^b$ hipotesian
- $K_o \in \chi^2_{(p-1)(q-1)}$
- $K_a$ , $K_b$, eta $K_o$ elkar independienteak dira.

Orduan:

$$\boxed{\begin{array}{ll} f_a = \dfrac{K_a/p-1}{K_o/(p-1)(q-1)} \in F_{p-1,(p-1)(q-1)} & H_o^a \text{ hipotesian} \\[2ex] f_b = \dfrac{K_b/q-1}{K_o/(p-1)(q-1)} \in F_{q-1,(p-1)(q-1)} & H_o^b \text{ hipotesian} \end{array}}$$

## $H_o^a$ eta $H_o^b$ EGIAZTATZEKO TESTAK

$\alpha$ signifikantza-maila jakin batentzat honela egingo ditugu testak:

### I. testa

baldin bada: $f_a = \dfrac{K_a/p-1}{K_o/(p-1)(q-1)} > F_{\alpha,(p-1),(p-1)(q-1)}$

$H_o^a$ hipotesia errefusatzen dugu edo A faktoreak Y aldagaiaren gain eragin nabaria duela baieztatzen dugu ($\alpha$ signifikantza-mailan).

### II. testa:

baldin bada: $f_b = \dfrac{K_b/q-1}{K_o/(p-1)(q-1)} > F_{\alpha, q-1,(p-1)(q-1)}$

$H_o^b$ = hipotesia errefusatzen dugu, edo B faktoreak Y aldagaiaren gain eragin nabaria duela baieztatzen dugu ($\alpha$ signifikantza-mailan).

## 2.2.3. LABURPEN PRAKTIKO-TAULAK-KALKULAERA Y?(A, B)

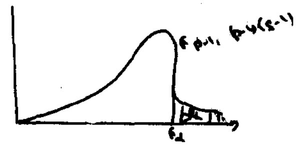
. Datu enpirikoen taula eta medien kalkulaketa

| $A \backslash B$ | $B_1$ | . . . | $B_j$ | . . | $B_q$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $y_{11}$ | . . . | $y_{1j}$ | . . | $y_{1q}$ | $\to y_{1.}$ |
| . | | | | | | . |
| $A_i$ | $y_{i1}$ | . . . | $y_{ij}$ | . . | $y_{iq}$ | $\to y_{i.}$ |
| . | | | | | | . |
| $A_p$ | $y_{p1}$ | . . . | $y_{pj}$ | . . | $y_{pq}$ | $\to y_{p.}$ |
| | $\downarrow y_{.1}$ | . . . | $\downarrow y_{.j}$ | . . | $\downarrow y_{.q}$ | $\to y_{..}$ |

Batura kuadratiko eta estatistikoen kalkulaketa

| Bariantz iturria | Batura kuadratikoak | libertate graduak | estatistikoak |
|---|---|---|---|
| A. ren eragina | $K_a = q \sum_{i=1}^{p} (y_{i.} - y_{..})^2$ | p-1 | $f_a = \dfrac{K_a / p-1}{K_0 / (p-1)(q-1)}$ |
| B. ren eragina | $K_b = p \sum_{j=1}^{q} (y_{.j} - y_{..})^2$ | q-1 | $f_b = \dfrac{K_b / q-1}{K_0 / (p-1)(q-1)}$ |
| azarea | $K_0 = \sum\sum (y_{ij} + y_{..} - y_{i.} - y_{.j})^2$ | (p-1)(q-1) | |

. . . <u>A faktorearen eragina egiaztatzeko testa:</u>

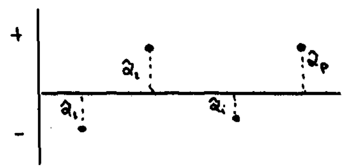



$\alpha$ signifikantza-maila jakin batentzat,

baldin bada: $f_a = \dfrac{K_a / p-1}{K_0/(p-1)(q-1)} > F_{\alpha, p-1, (p-1)(q-1)}$

$\Rightarrow H_0^a$ hipotesia errefusatuko dugu edo <u>A faktoreak Y aldagaiaren gain eragin nabaria dela baieztatuko dugu, % $(1-\alpha)$ konfidantza rekin.</u>

eta kasu honetan, grafika batetaz adierazi genitzake, Y. ren gain $A_i$ maila desberdinek dutenα$_i$ eraginen neurgarriak:




$\hat{a}_i = y_{i\cdot} - y_{\cdot\cdot} \quad \forall i$

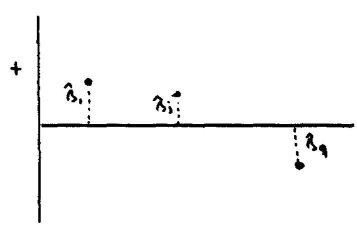
. . . <u>B faktorearen eragina egiaztatzeko testa:</u>


$\alpha$ signifikantza-maila jakin batentzat,

baldin bada: $f_b = \dfrac{K_b / q-1}{K_0/(p-1)(q-1)} > F_{\alpha, q-1, (p-1)(q-1)}$

$\Rightarrow H_0^b$ hipotesia errefusatuko dugu edo <u>B faktoreak Y aldegaiaren gain eragin nabaria dela baieztatuko dugu, % $(1-\alpha)$ konfidantzarekin.</u>

eta kasu honetan, grafika batetaz adierazi genitzake, Y. ren gain $B_j$ maila desberdinek duten $\beta_j$ eraginen neurgarriak:




$\hat{\beta}_j = y_{\cdot j} - y_{\cdot\cdot} \quad \forall j$

## 4. ANITZ BARIANTZEN HOMOGENOTASUNAREN EDO TA $H_{(3)}$ AURRE-HIPOTESIAREN EGIAZTAPENA.

### BARTLEY.REN TESTAK ETA TAULAK.

Bedi $H_{(3)}$: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2$ aurre-hipotesia (edo baliokidea dena, K populazioen azare-bariantza teorikoa berdina da).

Eta bitez, K erakuskari (populazio bakoitzeko bat):

$(y_{11} .. y_{1n_1});(y_{21} \ldots y_{2n_2}); \ldots ;(y_{i1} .. y_{in_i}); \ldots ;(y_{k1} .. y_{kn_k})$

Bartley.ek gehienbat bi kasu aztertu dizkigu:

$\boxed{(A) : n_i = n \quad \forall i=1 \ldots k \qquad \text{edo ta } n_1 \simeq n_2 \simeq .. \simeq n_k}$

. Kasu honetan, Bartley.ek $H_{(3)}$ aurre-hipotesia egiaztatzeko ESTATISTIKO hau proposatzen du:

$$F_{max} = \frac{S^2_{max}}{S^2_{min}}$$ (erakuskari desberdinetako sakabanakuntzen sasi- ibilera bat)

. $F_{max}$ estatistikoaren kalkulaketa:

Erakuskari desberdinen sakabanakuntza honela kalkulatuko dugu:

$$S_1^2 = \sum_{j=1}^{n_1} (y_{1j} - y_{1.})^2, \ldots \quad , S_k^2 = \sum_{j=1}^{n_k} (y_{kj} - y_{k.})^2$$

eta $S_1^2, S_2^2, \ldots S_k^2$ sakabanakuntzak ordenatuz gero, $S^2_{max}$ sakabanakuntza maximua eta $S^2_{min}$ sakabanakuntza minimua ditugu.

Beraz, baita ere beroien zatidura $f_{max} = \dfrac{S^2_{max}}{S^2_{min}}$ .

. $F_{max}$ ESTATISTIKOARI DAGOKION BANAKETA, $H_{(3)}$ aurre-hipotesian, Bartley.ek aztertu eta tabulatu zuen, zeinak bi parametro ditu: k, n-1

k: bariantz kopurua (edo ta gonbaratzen ditugun populazio kopurua)

$n-1 = \max_i n_i - 1$ : $S^2_i$.en libertate gradu handiena, (edo ta erakuskarien tamainik handiena ken bat)

. $H_{(3)}$: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2$ egiaztatzeko TESTA

$\alpha$, signifikantza-maila jakin batentzat , $F^{1-\alpha}_{max,\, k,\, n-1}$ balioa Bartley.ren taulan begiratu ondoren,

baldin bada: $f_{max} \geqslant F^{1-\alpha}_{max,\, k,\, n-1}$

$\Longrightarrow$ $H_{(3)}$ aurre-hipotesia errefusatuko dugu ( $\alpha$-rentzat).

# TAULA

## $F_{max}$ ESTATISTIKOAREN BANAKETA

| n-1 df for $s_x^2$ | $1-\alpha$ | k = number of variances 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | .95 | 9.60 | 15.5 | 20.6 | 25.2 | 29.5 | 33.6 | 37.5 | 41.4 | 44.6 |
| | .99 | 23.2 | 37. | 49. | 59. | 69. | 79. | 89. | 97. | 106. |
| 5 | .95 | 7.15 | 10.8 | 13.7 | 16.3 | 18.7 | 20.8 | 22.9 | 24.7 | 26.5 |
| | .99 | 14.9 | 22. | 28. | 33. | 38. | 42. | 46. | 50. | 54. |
| 6 | .95 | 5.82 | 8.38 | 10.4 | 12.1 | 13.7 | 15.0 | 16.3 | 17.5 | 18.6 |
| | .99 | 11.1 | 15.5 | 19.1 | 22. | 25. | 27. | 30. | 32. | 34. |
| 7 | .95 | 4.99 | 6.94 | 8.44 | 9.70 | 10.8 | 11.8 | 12.7 | 13.5 | 14.3 |
| | .99 | 8.89 | 12.1 | 14.5 | 16.5 | 18.4 | 20. | 22. | 23. | 24. |
| 8 | .95 | 4.43 | 6.00 | 7.18 | 8.12 | 9.03 | 9.78 | 10.5 | 11.1 | 11.7 |
| | .99 | 7.50 | 9.9 | 11.7 | 13.2 | 14.5 | 15.8 | 16.9 | 17.9 | 18.9 |
| 9 | .95 | 4.03 | 5.34 | 6.31 | 7.11 | 7.80 | 8.41 | 8.95 | 9.45 | 9.91 |
| | .99 | 6.54 | 8.5 | 9.9 | 11.1 | 12.1 | 13.1 | 13.9 | 14.7 | 15.3 |
| 10 | .95 | 3.72 | 4.85 | 5.67 | 6.34 | 6.92 | 7.42 | 7.87 | 8.28 | 8.66 |
| | .99 | 5.85 | 7.4 | 8.6 | 9.6 | 10.4 | 11.1 | 11.8 | 12.4 | 12.9 |
| 12 | .95 | 3.28 | 4.16 | 4.79 | 5.30 | 5.72 | 6.09 | 6.42 | 6.72 | 7.00 |
| | .99 | 4.91 | 6.1 | 6.9 | 7.6 | 8.2 | 8.7 | 9.1 | 9.5 | 9.9 |
| 15 | .95 | 2.86 | 3.54 | 4.01 | 4.37 | 4.68 | 4.95 | 5.19 | 5.40 | 5.59 |
| | .99 | 4.07 | 4.9 | 5.5 | 6.0 | 6.4 | 6.7 | 7.1 | 7.3 | 7.5 |
| 20 | .95 | 2.46 | 2.95 | 3.29 | 3.54 | 3.76 | 3.94 | 4.10 | 4.24 | 4.37 |
| | .99 | 3.32 | 3.8 | 4.3 | 4.6 | 4.9 | 5.1 | 5.3 | 5.5 | 5.6 |
| 30 | .95 | 2.07 | 2.40 | 2.61 | 2.78 | 2.91 | 3.02 | 3.12 | 3.21 | 3.29 |
| | .99 | 2.63 | 3.0 | 3.3 | 3.4 | 3.6 | 3.7 | 3.8 | 3.9 | 4.0 |
| 60 | .95 | 1.67 | 1.85 | 1.96 | 2.04 | 2.11 | 2.17 | 2.22 | 2.26 | 2.30 |
| | .99 | 1.96 | 2.2 | 2.3 | 2.4 | 2.4 | 2.5 | 2.5 | 2.6 | 2.6 |
| ∞ | .95 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| | .99 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |

| (B): $n_1 \neq n_2 \neq \ldots \neq n_k$ eta ia $n_i$ denentzat: $n_i > 5$ bada. |
|---|

. Kasu honetan, Bartley. ek $H_{(3)}$ aurre-hipotesia egiaztatzeko ESTATISTIKO hau proposatzen du:

$$v = 2'3025 \left(f \log S^2 - \sum_{i=1}^{k} f_i \log S_i^2\right)$$

non:
$$f_i = n_i - 1$$
$$S_i^2 = \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - y_{i.})^2$$
$$f = \sum_{i=1}^{k} f_i = \sum_{i=1}^{k} n_i - k$$
$$S = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \cdot S_i^2}{f} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} n_i} \cdot \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)\, S_i^2$$

- v estatistikoaren kalkulaketan, era honetako taulak erabili ohi dira:

| erakuskariak $i$ | $n_i$ | $S_i^2$ | $f_i = n_i - 1$ | $f_i S_i^2$ | $\log S_i^2$ | $f_i \log S_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_{11}\ y_{12} \cdots y_{1n_1}$<br>$y_{21}\ y_{22} \cdots y_{2n_2}$<br>$\vdots$<br>$y_{k1}\ y_{k2} \cdots y_{kn_k}$ | | | | | | |
| | | | $\sum = f$ | $\sum f_i S_i^2$ | | $\sum f_i \cdot \log S_i^2$ |

$$S = \frac{\sum_i f_i S_i^2}{f}$$

$$f \cdot \log S^2$$

. eta <u>v ESTATISTIKOARI DAGOKION BANAKETA</u>, $H_{(3)}$ <u>aurre-hipotesian</u> , Bartley. ek frogatu zuenez; gutti gorabehera, n = (k-1) libertate gradu dituen $X^2$(ji-karratu) banaketa bat da. (Zeina tabulatua dago).

laburki: $v \sim \underline{X^2_{k-1}}$ ($H_{(3)}$ aurre-hipotesian)

. Beraz <u>$H_{(3)}$: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2$ egiaztatzeko TESTA:</u>

$\alpha$, signifikantza jakin batentzat, $X^2_{\alpha, k-1}$ balioa tauletan begiratu ondoren ,

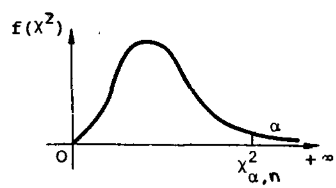
baldin bada: $v \geq X^2_{\alpha, k-1}$

$\Longrightarrow$ $H_{(3)}$ aurre-hipotesia errelusatuko dugu ( $\alpha$ signifikantza-mailarentzat)

# TAULA

## $\chi^2$ BANAKETA

$p(\chi_n^2 > \chi_\alpha^2) = \alpha$

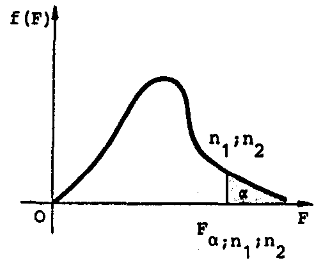



| n \ α | 0,990 | 0,975 | 0,950 | 0,900 | 0,100 | 0,050 | 0,025 | 0,010 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,031 6 | 0,039 8 | 0,023 9 | 0,015 8 | 2,71 | 3,84 | 5,02 | 6,63 |
| 2 | 0,02 | 0,05 | 0,10 | 0,21 | 4,60 | 5,99 | 7,38 | 9,21 |
| 3 | 0,12 | 0,22 | 0,35 | 0,58 | 6,25 | 7,81 | 9,35 | 11,24 |
| 4 | 0,30 | 0,48 | 0,71 | 1,06 | 7,78 | 9,49 | 11,1 | 13,28 |
| 5 | 0,55 | 0,83 | 1,15 | 1,61 | 9,24 | 11,07 | 12,8 | 15,09 |
| 6 | 0,87 | 1,24 | 1,64 | 2,20 | 10,64 | 12,59 | 14,0 | 16,81 |
| 7 | 1,24 | 1,69 | 2,17 | 2,83 | 12,02 | 14,07 | 16,0 | 18,47 |
| 8 | 1,65 | 2,18 | 2,73 | 3,49 | 13,36 | 15,51 | 17,5 | 20,09 |
| 9 | 2,09 | 2,70 | 3,33 | 4,17 | 14,68 | 16,92 | 19,0 | 21,66 |
| 10 | 2,56 | 3,25 | 3,94 | 4,86 | 15,99 | 18,31 | 20,5 | 23,21 |
| 11 | 3,05 | 3,82 | 4,57 | 5,58 | 17,27 | 19,67 | 21,9 | 24,72 |
| 12 | 3,57 | 4,40 | 5,23 | 6,30 | 18,55 | 21,03 | 23,3 | 26,22 |
| 13 | 4,11 | 5,01 | 5,89 | 7,04 | 19,81 | 22,36 | 24,7 | 27,69 |
| 14 | 4,66 | 5,63 | 6,57 | 7,79 | 21,06 | 23,68 | 26,1 | 29,14 |
| 15 | 5,23 | 6,26 | 7,26 | 8,55 | 22,31 | 25,00 | 27,5 | 30,58 |
| 16 | 5,81 | 6,81 | 7,96 | 9,31 | 23,54 | 26,30 | 28,8 | 32,00 |
| 17 | 6,41 | 7,56 | 8,87 | 10,08 | 24,77 | 27,59 | 30,2 | 33,41 |
| 18 | 7,01 | 8,23 | 9,39 | 10,86 | 25,99 | 28,87 | 31,3 | 34,80 |
| 19 | 7,63 | 8,91 | 10,1 | 11,65 | 27,20 | 30,14 | 32,9 | 36,19 |
| 20 | 8,26 | 9,59 | 10,9 | 12,44 | 28,41 | 31,41 | 34,2 | 37,57 |
| 21 | 8,90 | 10,3 | 11,6 | 13,24 | 29,61 | 32,67 | 35,5 | 38,93 |
| 22 | 9,54 | 11,0 | 12,3 | 14,04 | 30,81 | 33,92 | 36,8 | 40,29 |
| 23 | 10,2 | 11,7 | 13,1 | 14,85 | 32,01 | 35,17 | 38,1 | 41,64 |
| 24 | 10,9 | 12,4 | 13,8 | 15,66 | 33,20 | 36,41 | 39,4 | 42,98 |
| 25 | 11,5 | 13,1 | 14,6 | 16,47 | 34,38 | 37,65 | 40,6 | 44,31 |
| 26 | 12,2 | 13,8 | 15,4 | 17,29 | 35,56 | 38,88 | 41,9 | 45,64 |
| 27 | 12,9 | 14,6 | 16,2 | 18,11 | 36,74 | 40,11 | 43,2 | 46,96 |
| 28 | 13,6 | 15,3 | 16,9 | 18,94 | 37,92 | 41,34 | 44,5 | 48,28 |
| 29 | 14,3 | 16,0 | 17,7 | 19,77 | 39,09 | 42,56 | 45,7 | 49,59 |
| 30 | 15,0 | 16,8 | 18,5 | 20,60 | 40,26 | 43,77 | 47,0 | 50,89 |

# TAULA

## SNEDEKOR ETA FISHER. en F BANAKETA

$p(F \geq F_{\alpha}) = \alpha$




| $n_2 \backslash n_1$ | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | α=0,05 | 0,01 | 0,05 | 0,01 | 0,05 | 0,01 | 0,05 | 0,01 | 0,05 | 0,01 |
| 1 | 161,4 | 4 052 | 199,5 | 4 999 | 215,7 | 5 403 | 224,8 | 5 625 | 230,2 | 5 764 |
| 2 | 18,51 | 98,49 | 19,00 | 99,00 | 19,16 | 99,17 | 19,25 | 99,25 | 19,30 | 99,30 |
| 3 | 10,13 | 34,12 | 9,55 | 30,81 | 9,28 | 29,46 | 9,12 | 28,71 | 9,01 | 28,24 |
| 4 | 7,71 | 21,20 | 6,94 | 18,00 | 6,59 | 16,69 | 6,39 | 15,98 | 6,26 | 15,52 |
| 5 | 6,61 | 16,26 | 5,79 | 13,27 | 5,41 | 12,06 | 5,19 | 11,39 | 5,05 | 10,97 |
| 6 | 5,99 | 13,74 | 5,14 | 10,91 | 4,76 | 9,78 | 4,53 | 9,15 | 4,39 | 8,75 |
| 7 | 5,59 | 12,25 | 4,74 | 9,55 | 4,35 | 8,45 | 4,12 | 7,85 | 3,97 | 7,45 |
| 8 | 5,32 | 11,26 | 4,46 | 8,65 | 4,07 | 7,59 | 3,84 | 7,01 | 3,69 | 6,63 |
| 9 | 5,12 | 10,56 | 4,26 | 8,02 | 3,86 | 6,99 | 3,63 | 6,42 | 3,48 | 6,06 |
| 10 | 4,96 | 10,04 | 4,10 | 7,56 | 3,71 | 6,55 | 3,48 | 5,99 | 3,33 | 5,64 |
| 11 | 4,84 | 9,65 | 3,98 | 7,20 | 3,59 | 6,22 | 3,36 | 5,67 | 3,20 | 5,32 |
| 12 | 4,75 | 9,33 | 3,88 | 6,93 | 3,49 | 5,95 | 3,26 | 5,41 | 3,11 | 5,06 |
| 13 | 4,67 | 9,07 | 3,80 | 6,70 | 3,41 | 5,74 | 3,18 | 5,20 | 3,02 | 4,86 |
| 14 | 4,60 | 8,86 | 3,74 | 6,51 | 3,34 | 5,56 | 3,11 | 5,03 | 2,96 | 4,69 |
| 15 | 4,54 | 8,68 | 3,68 | 6,36 | 3,29 | 5,42 | 3,06 | 4,89 | 2,90 | 4,56 |
| 16 | 4,49 | 8,53 | 3,63 | 6,23 | 3,24 | 5,29 | 3,01 | 4,77 | 2,85 | 4,44 |
| 17 | 4,45 | 8,40 | 3,59 | 6,11 | 3,20 | 5,18 | 2,96 | 4,67 | 2,81 | 4,34 |
| 18 | 4,41 | 8,28 | 3,55 | 6,01 | 3,16 | 5,09 | 2,93 | 4,58 | 2,77 | 4,25 |
| 19 | 4,38 | 8,18 | 3,52 | 5,93 | 3,13 | 5,01 | 2,90 | 4,50 | 2,74 | 4,17 |
| 20 | 4,35 | 8,10 | 3,49 | 5,85 | 3,10 | 4,94 | 2,87 | 4,43 | 2,71 | 4,10 |
| 21 | 4,32 | 8,02 | 3,47 | 5,78 | 3,07 | 4,87 | 2,84 | 4,37 | 2,68 | 4,04 |
| 22 | 4,30 | 7,94 | 3,44 | 5,72 | 3,05 | 4,82 | 2,82 | 4,31 | 2,66 | 3,99 |
| 23 | 4,28 | 7,88 | 3,42 | 5,66 | 3,03 | 4,76 | 2,80 | 4,26 | 2,64 | 3,94 |
| 24 | 4,26 | 7,82 | 3,40 | 5,61 | 3,01 | 4,72 | 2,78 | 4,22 | 2,62 | 3,90 |
| 25 | 4,24 | 7,77 | 3,38 | 5,57 | 2,99 | 4,68 | 2,76 | 4,18 | 2,60 | 3,86 |
| 26 | 4,22 | 7,72 | 3,37 | 5,53 | 2,98 | 4,64 | 2,74 | 4,14 | 2,59 | 3,82 |
| 27 | 4,21 | 7,68 | 3,35 | 5,49 | 2,96 | 4,60 | 2,73 | 4,11 | 2,57 | 3,78 |
| 28 | 4,20 | 7,64 | 3,34 | 5,45 | 2,95 | 4,57 | 2,71 | 4,07 | 2,56 | 3,75 |
| 29 | 4,18 | 7,60 | 3,33 | 5,42 | 2,93 | 4,54 | 2,70 | 4,04 | 2,54 | 3,73 |
| 30 | 4,17 | 7,56 | 3,32 | 5,39 | 2,92 | 4,51 | 2,69 | 4,02 | 2,53 | 3,70 |
| 40 | 4,08 | 7,31 | 3,23 | 5,18 | 2,84 | 4,31 | 2,61 | 3,83 | 2,45 | 3,51 |
| 60 | 4,00 | 7,08 | 3,15 | 4,98 | 2,76 | 4,13 | 2,52 | 3,65 | 2,37 | 3,34 |
| 120 | 3,92 | 6,85 | 3,07 | 4,79 | 2,68 | 3,95 | 2,45 | 3,48 | 2,29 | 3,17 |
| ∞ | 3,84 | 6,64 | 2,99 | 4,60 | 2,60 | 3,78 | 2,37 | 3,32 | 2,21 | 3,02 |

## T A U L A (jarraipena)

## SNEDEKOR ETA FISCHER. en F BANAKETA

| $n_2$ \ $n_1$ | 6 | | 8 | | 12 | | 24 | | ∞ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | α=0,05 | 0,01 | 0,05 | 0,01 | 0,05 | 0,01 | 0,05 | 0,01 | 0,05 | 0,01 |
| 1 | 234,0 | 5 859 | 238,9 | 5 981 | 243,9 | 6 106 | 249,0 | 6 234 | 254,3 | 6 366 |
| 2 | 19,33 | 99,33 | 19,37 | 99,36 | 19,41 | 99,42 | 19,45 | 99,46 | 19,50 | 99,50 |
| 3 | 8,94 | 27,91 | 8,84 | 27,49 | 8,74 | 27,05 | 8,64 | 26,60 | 8,53 | 26,12 |
| 4 | 6,16 | 15,21 | 6,04 | 14,80 | 5,91 | 14,37 | 5,77 | 13,93 | 5,63 | 13,46 |
| 5 | 4,95 | 10,67 | 4,82 | 10,27 | 4,68 | 9,89 | 4,53 | 9,47 | 4,36 | 9,02 |
| 6 | 4,28 | 8,47 | 4,15 | 8,10 | 4,00 | 7,72 | 3,84 | 7,31 | 3,67 | 6,88 |
| 7 | 3,87 | 7,19 | 3,73 | 6,84 | 3,57 | 6,47 | 3,41 | 6,07 | 3,23 | 5,65 |
| 8 | 3,58 | 6,37 | 3,44 | 6,03 | 3,28 | 5,67 | 3,12 | 5,28 | 2,93 | 4,86 |
| 9 | 3,37 | 5,80 | 3,23 | 5,47 | 3,07 | 5,11 | 2,90 | 4,73 | 2,71 | 4,31 |
| 10 | 3,22 | 5,39 | 3,07 | 5,06 | 2,91 | 4,71 | 2,74 | 4,33 | 2,54 | 3,91 |
| 11 | 3,09 | 5,07 | 2,95 | 4,74 | 2,79 | 4,40 | 2,61 | 4,02 | 2,40 | 3,60 |
| 12 | 3,00 | 4,82 | 2,85 | 4,50 | 2,69 | 4,16 | 2,50 | 3,78 | 2,30 | 3,36 |
| 13 | 2,92 | 4,62 | 2,77 | 4,30 | 2,60 | 3,96 | 2,42 | 3,59 | 2,21 | 3,16 |
| 14 | 2,85 | 4,46 | 2,70 | 4,14 | 2,53 | 3,80 | 2,35 | 3,43 | 2,13 | 3,00 |
| 15 | 2,79 | 4,32 | 2,64 | 4,00 | 2,48 | 3,67 | 2,29 | 3,29 | 2,07 | 2,87 |
| 16 | 2,74 | 4,20 | 2,59 | 3,89 | 2,42 | 3,55 | 2,24 | 3,18 | 2,01 | 2,75 |
| 17 | 2,70 | 4,10 | 2,55 | 3,79 | 2,38 | 3,45 | 2,19 | 3,08 | 1,96 | 2,65 |
| 18 | 2,66 | 4,01 | 2,51 | 3,71 | 2,34 | 3,37 | 2,15 | 3,00 | 1,92 | 2,57 |
| 19 | 2,63 | 3,94 | 2,48 | 3,63 | 2,31 | 3,30 | 2,11 | 2,92 | 1,88 | 2,49 |
| 20 | 2,60 | 3,87 | 2,45 | 3,56 | 2,28 | 3,23 | 2,08 | 2,86 | 1,84 | 2,42 |
| 21 | 2,57 | 3,81 | 2,42 | 3,51 | 2,25 | 3,17 | 2,05 | 2,80 | 1,81 | 2,36 |
| 22 | 2,55 | 3,76 | 2,40 | 2,45 | 2,23 | 3,12 | 2,03 | 2,75 | 1,78 | 2,31 |
| 23 | 2,53 | 3,71 | 2,38 | 3,41 | 2,20 | 3,07 | 2,00 | 2,70 | 1,76 | 2,26 |
| 24 | 2,51 | 3,67 | 2,36 | 3,36 | 2,18 | 3,03 | 1,98 | 2,66 | 1,73 | 2,21 |
| 25 | 2,49 | 3,63 | 2,34 | 3,32 | 2,16 | 2,99 | 1,96 | 2,62 | 1,71 | 2,17 |
| 26 | 2,47 | 3,59 | 2,32 | 3,29 | 2,15 | 2,96 | 1,95 | 2,58 | 1,69 | 2,13 |
| 27 | 2,46 | 3,56 | 2,30 | 3,26 | 2,13 | 2,93 | 1,93 | 2,55 | 1,67 | 2,10 |
| 28 | 2,44 | 3,53 | 2,29 | 3,23 | 2,12 | 2,90 | 1,91 | 2,52 | 1,65 | 2,06 |
| 29 | 2,43 | 3,50 | 2,28 | 3,20 | 2,10 | 2,87 | 1,90 | 2,49 | 1,64 | 2,03 |
| 30 | 2,42 | 3,47 | 2,27 | 3,17 | 2,09 | 2,84 | 1,89 | 2,47 | 1,62 | 2,01 |
| 40 | 2,34 | 3,29 | 2,18 | 2,99 | 2,00 | 2,66 | 1,79 | 2,29 | 1,51 | 1,80 |
| 60 | 2,25 | 3,12 | 2,10 | 2,82 | 1,92 | 2,50 | 1,70 | 2,12 | 1,39 | 1,60 |
| 120 | 2,17 | 2,96 | 2,01 | 2,66 | 1,83 | 2,34 | 1,61 | 1,95 | 1,25 | 1,38 |
| ∞ | 2,09 | 2,80 | 1,94 | 2,51 | 1,75 | 2,18 | 1,52 | 1,79 | 1,00 | 1,00 |

## HIZTEGIA

### A

| | |
|---|---|
| aldagai : | variable |
| aldagai aleatorio: | variable aleatoria |
| aleatorio: | aleatorio |
| aurre-hipotesia: | hipótesis previa |
| azarea: | azar |
| azare-bariantza: | varianza debida al azar |
| azare-egoera: | condiciones de azar |

### B

| | |
|---|---|
| balio, balore: | valor |
| banaketa : | distribución |
| bariantza: | varianza |
| bariantz-analisia: | análisis de varianza |
| bariantz-iturria: | fuente de variación |
| batez-besteko: | promedio |
| batura kuadratikoa: | suma cuadrática |

### D

| | |
|---|---|
| datu: | dato |
| datu enpirikoak: | datos empíricos |
| diseinu: | diseño |
| deduk zio: | deducción |

### E

| | |
|---|---|
| egoera berdina: | condiciones análogas |
| elkarekintza: | interacción |
| emaitza: | solución, resultado |
| eragin: | efecto |
| egarin nabaria: | efecto significativo, efecto notable |

| | |
|---|---|
| eragin sistematikozko faktorea: | factor de efectos sistemáticos |
| eragin aleatoriozko faktorea: | factor de efectos aleatorios |
| eredu linealak: | modelos lineales |
| eremu matematikoa: | modelo matemático |
| erregresio analisia: | análisis de regresión |
| erresultatu enpirikoak: | resultados empíricos |
| errenkada: | fila |
| estatistiko: | estadístico |
| estimaketak: | estimaciones |
| estimatzaileak, neurgarriak: | estimadores |
| errefus-arloa: | región de rechazo |

F

| | |
|---|---|
| faktore: | factor |

G

| | |
|---|---|
| grafika: | gráfica |

H

| | |
|---|---|
| hipotesi: | hipótesis |
| hipotesien egiaztapena: | contraste de hipótesis |
| hipotesiaren errefus-arloa: | región de rechazo de la hipótesis |
| hipotesia egiaztatu: | aceptar una hipótesis |

K

| | |
|---|---|
| kalkulaera: | forma de calcular |
| konfidantz-gradua: | grado de confianza |
| kopuru: | número, cantidad |
| kuadratiko, batura kuadratiko: | suma cuadrática |

L

| | |
|---|---|
| laburpen praktiko: | resumen práctico |
| libertate gradu: | grados de libertad |

M

| | |
|---|---|
| maila : | nivel |
| maila desberdin: | distintos niveles |
| maila kopurua: | nº de niveles |
| maila-populazioa: | población de niveles |
| maximu: | máximo |
| minimu: | mínimo |

N

| | |
|---|---|
| neurketak: | medidas |

O

| | |
|---|---|
| obserbazio, somazio: | obserbación |
| obserbazio kopurua: | nº de observaciones |
| obserbazio kopurua guztira: | nº de observaciones en total |
| oinarri teoriko: | fundamentos teóricos |

P

| | |
|---|---|
| probabilitate banaketa: | distribución de probabilidades |

S

| | |
|---|---|
| sailkatze sinplea: | clasificación simple |
| sailkatze gurutzatu bikoitza: | clasificación doble cruzada |
| sakabanakuntza: | dispersión |
| sakabanakuntza guztira: | dispersión total |
| sakabanakuntzaren deskonposaketa: | descomposición de la dispersión |

| | |
|---|---|
| signifikantza-maila: | nivel de significación |

T

| | |
|---|---|
| tegitxota: | celda, casilla |
| testa: | test |

Z

| | |
|---|---|
| zenbakizko eredu: | modelo numérico |
| zenbakizko exenplu: | ejemplo numérico |
| zenbatugarri: | cuantitativo |
| zenbatugaitz: | cualitativo |
| zutabe: | columna |

## BIBLIOGRAFIA


FISHER, Ronald A. "Statistical methods for research workers". Ed. Oliver and Boyd, 1970. Edinburgh.

GEOFFREY DEPPEL, "Design and Analysis: A researcher's handbook". Ed. Prentice-Hall. Inc., Englewood. Cliffs, N. J. 1973.

CHING CHUN LI, Ph. D. " Introduction a la Estadística Experimental" Ed. McGraw-Hill Book Company. New York, 1969.

SCHEFFE, Henry. " The Analysis of Variance". Ed. Librery of Congress. New York, 1959.

WINER, B. J. - "Statistical Principles in experimental design" Ed. McGraw-Hill. New York, 1962.

IVERSEN, Gudmund R. "Analysis of Variance". Ed. Sage University Press. Norpoth, 1976.

YATES, Frank - "Experimental design". London. 1970. Ed. Griffin.

COCHRAN, William G., y COX, Gertrude M., "Experimental design". Ed. Chapman and Hall. 1955.

FEDERER, - "Experimental design".

COX, D. R. - "Planning of Experiments".

KEMPTHORNE, Oscar, "The design and analysis of experiments". 1. 975.